Als vervolg op 'Tosti aarde' in het vorige nummer gaan we nu rekenen aan afstanden en oppervlaktes op de aardbol. Daarvoor moet je wat goniometrie kennen, maar wie zich daar niet door laat afschrikken, krijgt te zien hoe je kunt vaststellen of een gesloten kromme op het aardoppervlak een echte 'reis om de wereld' genoemd mag worden.

■ door Jan Guichelaar

WERELDKROMMEN

In het artikel 'Tosti aarde' in het januarinummer beloofden we een schatting te maken van de grootte van het land op aarde dat ook een *antipode* op land heeft, uitgaande van 30% land en 70% zee. Kijk nog eens naar de dubbele gespiegelde wereldkaart uit het vorige nummer. Neem aan dat er geen correlatie (samenhang) bestaat tussen de twee over elkaar heen liggende kaarten. Dan is de kans, bij een willekeurige prik door de twee kaarten, dat je op beide land raakt gelijk aan $0{,}3^2 = 0{,}09$. Dus 9% van de aardbol bestaat uit land-land antipodenpunten.

Voor zee-zee antipoden geldt dat die 49% van de aardbol bedekken (want $0{,}7^2 = 0{,}49$). Voor zee-land antipoden is dat ten slotte natuurlijk 42% van het aardoppervlak (want $2 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}42$). Ter controle: $9 + 49 + 42 = 100$.

Blijft de vraag: mag je aannemen dat er geen samenhang bestaat tussen de twee kaarten? Op het eerste gezicht zou je denken dat ze juist wél samenhangen, want de kaarten zijn elkaars spiegelbeeld. Maar niet alleen dat, ze zijn ook over een halve wereldbol ten opzichte van elkaar verschoven. Als een punt op de aardbol niet 'weet' (of: geen invloed ondervindt van) wat er op de tegenoverliggende plek op de aardbol gebeurt, klopt de aanname.

Voor twee punten op maar 10 kilometer van elkaar is dit natuurlijk niet waar; als het ene punt in zee ligt, is de kans heel groot dat het andere punt ook in zee ligt, simpelweg omdat zeeën groot zijn, en net zoiets geldt voor landmassa's. Maar als twee punten een halve aardbol – 20.000 kilometer – van elkaar liggen, valt moeilijk te verzinnen welk geologisch proces er voor zou zorgen dat ze bij voorkeur allebei in zee, of allebei op land liggen, of bij voorkeur juist niet.

Kijk door je oogwimpers naar de gespiegelde kaarten: de aanname lijkt zo gek nog niet.

SINAASAPPELPARTEN Neem op een bol drie grootcirkels, die een driehoek ABC vastleggen, zie figuur 1. De punten A en A', B en B' en C en C' zijn elkaars antipoden. Zo dadelijk zullen we de oppervlakte van de driehoek op het aardoppervlak berekenen.

Beschouw nu eerst de figuur $ABA'CA$, een sinaasappelpart met twee antipodenpunten A en A' en twee halve grootcirkels (ABA' en ACA') als begrenzing. Van dit stuk van de bol willen we de oppervlakte berekenen. De figuur is te vergelijken met de noord- en zuidpool (A en A') en twee meridianen (ABA' en ACA'). De twee vlakken door de grootcirkels maken een hoek α met elkaar (het verschil tussen de twee lengtegraden indien we de polen nemen). De oppervlakte O is dan natuurlijk het $(\alpha/2\pi)^{de}$ gedeelte van de oppervlakte van de hele bol. Hierbij nemen we de hoek in radialen ($2\pi = 360°$).

De oppervlakte van een bol is $4\pi r^2$, met r de straal van de bol. Dan krijgen we voor O:

$$O = \frac{\alpha}{2\pi} 4\pi r^2 = 2\alpha r^2 .$$

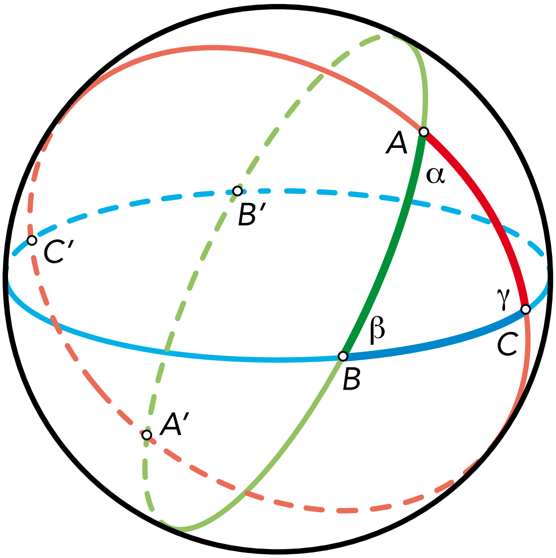
OPPERVLAKTE DRIEHOEK De oppervlakte van een sinaasappelpart was dus niet zo moeilijk. Maar ook de oppervlakte van een driehoek is met enig kijken snel te vinden.

Een driehoek op een bol begrensd door drie stukken grootcirkel heet een *Eulerse driehoek* (er zijn veel zaken in de wiskunde genoemd naar de grote wiskundige Leonard Euler (1707-1783)). Als we goed in figuur 1 kijken, zien we voor enkele oppervlaktes op de bol, waarbij we voor het gemak $r = 1$ nemen, de volgende gelijkheden:

$$AB'A'C'A = A'B'C' + AB'C',$$
$$BCB'AB = ABC + CB'A,$$
$$CAC'BC = ABC + ABC'.$$

Dit zijn sinaasappelparten, en met $A'B'C' = ABC$ krijgen we:

$$2\alpha = ABC + AB'C',$$
$$2\beta = ABC + CB'A,$$
$$2\gamma = ABC + ABC'.$$



Figuur 1 Drie grootcirkels op een bol, die een driehoek *ABC* vastleggen.

Nu geldt ook dat de driehoeken $AB'C'$, $CB'A$ en ABC' samen met ABC een halve bol vormen. Dus:

$$AB'C' + CB'A + ABC' = 2\pi - ABC. \qquad (*)$$

Tel nu het drietal vergelijkingen hierboven bij elkaar op en maak gebruik van (∗):

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 3ABC + 2\pi - ABC.$$

Dat levert voor de oppervlakte van driehoek ABC (met straal r erbij):

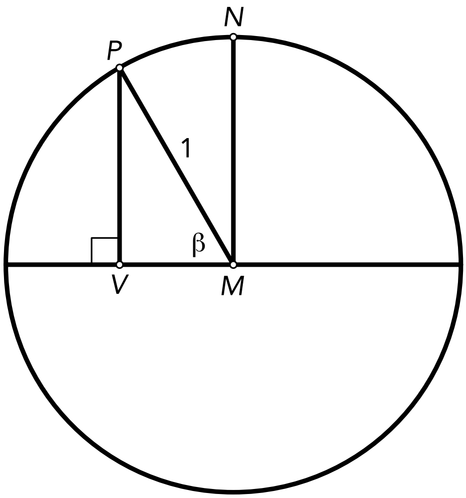
$$ABC = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2.$$

In een vlakke driehoek zijn de drie hoeken van een driehoek samen 180° of π radialen. Op een bol zijn de drie hoeken samen groter dan π. Het verschil $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ heet het *sferisch exces* (het extra op een bol of sfeer). Het is een verbijsterend eenvoudige formule.

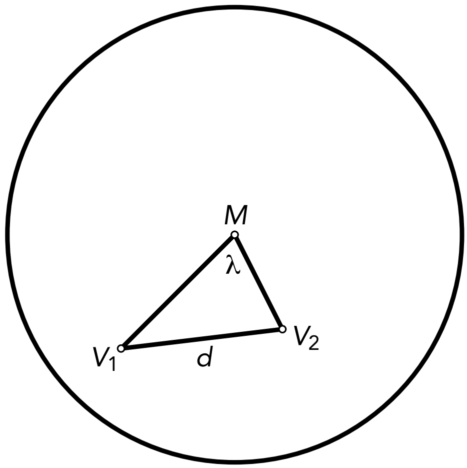
PLAATSBEPALING OP AARDE Voor de plaatsbepaling op aarde tekenen we in gedachten op de aarde breedtecirkels vanaf de evenaar en lengtecirkels of meridianen vanaf de nulmeridiaan door Greenwich in Engeland.
We gebruiken als eenheden de breedtegraden (noorderbreedte vanaf de evenaar gemeten van 0° tot 90° op de noordpool en zuiderbreedte van 0° tot 90° van de evenaar tot de zuidpool) en lengtegraden (oosterlengte van 0° tot 180° tegenover Greenwich en westerlengte van 0° tot −180°). Van veel plaatsen op aarde kennen we de coördinaten op deze manier. En als je met je iPhone via gps een plaatsbepaling kunt maken, dan krijg je de gegevens in decimale graden (bijvoorbeeld 23°,51 = 23°30'36"; met 1° = 60 minuten = 60' en 1' = 60 seconden = 60"). We zullen als eerste oefening de afstand in km op het aardoppervlak gaan berekenen tussen twee punten waarvan de breedte- en lengtegraden gegeven zijn. Daarbij gaan we ervan uit dat de verbindingslijn deel is van een grootcirkel.

'LIJNSTUK' OP AARDOPPERVLAK Neem twee punten P_1 en P_2 op het aardoppervlak en het vlak door P_1 en P_2 en het middelpunt van de aarde M. Dat vlak legt de grootcirkel door P_1 en P_2 vast. Er zijn twee delen van deze grootcirkel begrensd door P_1 en P_2. We beschouwen het kleinste stuk (kan natuurlijk ook 180° of π radialen zijn). De 'driehoek' MP_1P_2 heeft bij M hoek $p \leq \pi$. Een deel van een grootcirkel op het aardoppervlak kan dus ook worden weergegeven door een hoek bij M.

Hoe groot is deze hoek? Teken nu het echte lijnstuk P_1P_2. Dat ligt dus binnen de bol. In ΔMP_1P_2



Figuur 2 *M* is het middelpunt van de aarde, *N* is de noordpool. Er geldt: $VM = \cos\beta$ en $PV = \sin\beta$.



Figuur 3 Een vlak door de evenaar. *M* is het middelpunt van de aarde. Er geldt: $MV_1 = \cos\beta_1$, $MV_2 = \cos\beta_2$ en $V_1V_2 = d$.

geldt de cosinusregel (zie het kader op pagina 23):

$$P_1P_2{}^2 = MP_1{}^2 + MP_2{}^2 - 2 \cdot MP_1 \cdot MP_2 \cdot \cos p.$$

Neem nu voor het gemak de straal van de aarde weer gelijk aan 1. Later voegen we deze r dan wel weer toe. Dan krijgen we p als functie van P_1P_2:

$$\cos p = \frac{2 - P_1P_2^2}{2}. \qquad (**)$$

En voor de lengte L van het kromme 'lijnstuk' op het aardoppervlak krijgen we dan verhoudingsgewijs:

$$\frac{L}{2\pi r} = \frac{p}{2\pi}$$

en dus

$$L = pr.$$

Om L in km te krijgen, moeten we $r = 6300$ km nemen (benaderd; de polen liggen 22 km dichter bij M dan de punten op de evenaar). Maar om nu L echt te berekenen, moeten we, uitgaande van het feit dat we de twee punten P_1 en P_2 in lengte- en breedtegraden weten, eerst p hierin uitdrukken. Dat doen we door eerst de echte koorde P_1P_2 te berekenen en daaruit p.

AFSTAND TUSSEN TWEE PUNTEN OP AARDE Neem om de gedachten te bepalen de punten P_1 en P_2 op het noordelijk halfrond met breedtegraden β_1 en β_2, en lengtegraden λ_1 en λ_2. Voor de algemene uitkomst maakt dat niet uit. Noem $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Als het tweede punt op het westelijk halfrond ligt, tellen de twee hoeken vanwege het minteken mooi op.

Neem door elk van de punten P_1 en P_2 het vlak door M en de polen. Projecteer de punten P_1 en P_2 op het vlak door de evenaar. Dit geeft de voetpunten V_1 en V_2. De afstanden van V_1 en V_2 tot het middelpunt van de aarde M zijn $\cos\beta_1$ en $\cos\beta_2$ en voor de hoogtes boven het vlak van de evenaar $\sin\beta_1$ en $\sin\beta_2$. In figuur 2 is de situatie voor één punt P getekend.

Voor de afstand d tussen de voetpunten geldt met behulp van de cosinusregel:

$$d^2 = \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 - 2\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\lambda,$$

zie figuur 3.

Als we nu langs V_1P_1 en V_2P_2 de hoogte in gaan (loodrecht op het vlak door de evenaar naar boven), krijgen we op de hoogte door P_1 (neem $\beta_2 > \beta_1$) het lijnstuk $P_1Q = d$. Dan hebben we P_1P_2 in de rechthoekige driehoek P_1P_2Q, zie figuur 4. Daarin geldt de stelling van Pythagoras; even rekenen ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$) levert:

$$P_1P_2{}^2 = d^2 + (\sin\beta_2 - \sin\beta_1)^2 =$$
$$2 - 2(\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\lambda + \sin\beta_1\sin\beta_2).$$

Dus met (**) krijgen we dan:

$$\cos p = \cos\beta_1\cos\beta_2\cos\lambda + \sin\beta_1\sin\beta_2.$$

Hiermee kunnen we dus uit de lengte- en breedtegraden van twee punten op aarde eerst p en vervolgens de afstand via de grootcirkel berekenen. Voor enkele eenvoudige gevallen kun je de formule controleren. (Voor de twee polen geldt bijvoorbeeld: $\beta_1 = \pi/2$ en $\beta_2 = -\pi/2$, dus $\cos p = -1$ ofwel $p = \pi$.)

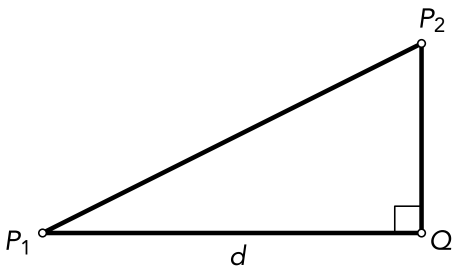
DRIEHOEK OP AARDE We weten nu dat een driehoek ABC op een bol drie hoeken α, β en γ op het boloppervlak heeft en ook de drie hoeken a, b en c bij het middelpunt M (hoek a eindigt zijn benen in de punten B en C, enzovoort). We kunnen nu, uitgaande van de lengte- en breedtegraden van de drie punten van een driehoek, de drie hoeken a, b en c berekenen. Maar voor de oppervlakte van de driehoek hebben we de hoeken op het oppervlak α, β en γ nodig. Hoe komen we van a, b en c (de hoeken bij M) naar α, β en γ (op de bol)?

Hiervoor kunnen we de zogeheten *cosinusregel voor boldriehoeken* gebruiken. Die luidt:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Er zijn er nog twee natuurlijk (net als bij de gewone cosinusregel): één met $\cos \beta$ en één met $\cos \gamma$. We zullen deze cosinusregel hier niet afleiden. Het is wat meer gedoe dan de vorige afleidingen, maar niet echt veel moeilijker. Met dit laatste gereedschap kunnen we dan van elke drie punten op de wereldbol de oppervlakte van de Eulerse driehoek berekenen.

WERELDKROMME In de vorige aflevering gaven we als definitie van een 'reis om de wereld': *een gesloten kromme, die de aardbol verdeelt in twee ge-*



Figuur 4 Er geldt: $P_2Q = \sin \beta_2 - \sin \beta_1$ en $P_1Q = d = V_1V_2$.

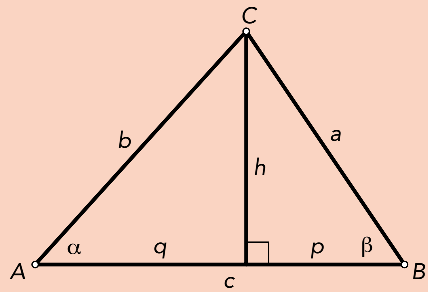
DE COSINUSREGEL

Zie onderstaande figuur.
Gebruik twee keer de stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + p^2 = h^2 + (c-q)^2 = \\ &\quad h^2 + c^2 + q^2 - 2cq = \\ &\quad b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

Natuurlijk geldt ook:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



lijke oppervlaktes (een wereldkromme). Als we nu een echte reis om de wereld hebben gemaakt, die de aarde niet verdeelt in twee gelijke stukken, wanneer kan het dan toch een echte reis om de wereld genoemd worden?

Kijk naar de volgende gedachteprocedure. Neem een tocht die bestaat uit een (groot) aantal stukken van grootcirkels. Kies op twee opvolgende stukken een punt. Neem het stuk van de verbindende grootcirkel tussen deze twee punten op in de 'reis' en laat de 'omweg' weg. De totale reis wordt dan korter, omdat de driehoeksongelijkheid ook voor Eulerse driehoeken geldt (in de gewone driehoek ABC geldt $AB < BC + CA$, maar ook voor de bogen geldt bg $AB <$ bg $BC +$ bg CA). Probeer dat maar eens aan te tonen.

De ene 'helft' wordt nu *groter* in oppervlakte en de andere helft *kleiner*. Probeer dat nu zo te doen dat het *grootste deel kleiner* en het *kleinste deel groter* wordt. Als je door een aantal afsnijdingen de route zó kunt maken dat de twee helften gelijke oppervlakte hebben, dan heb je een wereldkromme gemaakt, en noemen we de oorspronkelijke route een echte wereldreis.

Dit kan zeker niet altijd. Immers, neem een reis rond de noordpool (neem voor het gemak een breedtecirkel), op het noordelijk halfrond. Een afsnijding maakt het *kleine deel kleiner* en het *grote deel groter*. Dan kom je er dus nooit. ■